TD_7 – Espaces probabilisés

Exercice 1 ★

Un parlement est constitué de 470 parlementaires. On procède à l'élection d'une commission de 5 membres. Chaque parlementaire vote pour 5 candidats. On suppose qu'il n'y a ni vote nul, ni abstention. On considère les 3 candidats A, B et C. 282 parlementaires ont voté pour A, 117 pour A et B, 105 pour A et C, 79 pour A, B et C, 117 pour B et C mais pas pour A, 27 pour C mais pas pour A ni pour B, 133 pour B mais pas pour A.

1. Combien de parlementaires ont voté pour B ?
2. Combien de parlementaires ont voté pour C ?
3. Combien de parlementaires n'ont voté ni pour A, ni pour B, ni pour C ?

Exercice 2 ★

Dans une classe de 36 élèves, il y a 25 élèves qui mangent à la cantine le midi, 13 élèves qui mangent à la cantine le soir, et 7 élèves qui mangent à la cantine le midi et le soir.

1. Combien y-a-t-il d'élèves qui mangent à la cantine au moins une fois par jour ?
2. Combien y-a-t-il d'élèves qui ne mangent pas à la cantine ?

Exercice 3 ★★

Quel est le nombre de triplets d'entiers naturels $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ vérifiant « $a+b+c=n$ » où $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 4 ★★

1. Soit A, B et C trois événements. Exprimer en fonction de A, B, C et des opérations sur les ensembles les événements suivants :
   (i) A seul se produit
   (ii) A et C se produisent, mais non B
   (iii) les trois événements se produisent
   (iv) l'un au moins des événements se produit
   (v) au moins deux événements se produisent
   (vi) un événement au plus se produit
   (vii) aucun des trois événements ne se produit
   (viii) deux événements exactement se produisent
   (ix) deux événements au plus se produisent.
2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'événements. Exprimer en fonction des A_n les événements correspondant à la réalisation de
   (i) tous les A_n,
   (ii) au moins un des A_n,
   (iii) aucun des A_n,
   (iv) au plus un des A_n,
   (v) exactement un des A_n,
   (vi) tous les A_n à partir d'un certain rang.

Exercice 5 ★★

Une maladie M affecte un français sur 1000. On dispose d'un test sanguin qui détecte M avec une fiabilité de 0.99 lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant on obtient un résultat faussement positif pour 0.2% des personnes saines testées.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne ayant obtenu un résultat positif soit réellement malade ?
2. Que pensez-vous de ce test ?

Exercice 6 ★★

Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher : quatre vertes et deux jaunes. On tire au hasard, deux fois de suite, deux boules simultanément, les boules n'étant pas remises dans l'urne. On note A, B, C, D les événements suivants :

— A : « aucune boule verte n'est tirée au cours du premier tirage de deux boules. »

— B : « une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du premier tirage de deux boules. »

— C : « deux boules vertes sont tirées au cours du premier tirage de deux boules. »

— D : « une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du deuxième tirage de deux boules. »

1. Calculer $\mathbb{P}_A(D)$, $\mathbb{P}_B(D)$, et $\mathbb{P}_C(D)$.
2. En déduire les probabilités des événements $D \cap A$, $D \cap B$ et $D \cap C$.
3. Calculer la probabilité de l'événement D.

Exercice 7 ★★

On lance un dé à 6 faces non cubique. On suppose que la probabilité d'obtenir un chiffre k est proportionnelle à k.

1. Déterminer la constante de proportionnalité
2. Déterminer la probabilité d'obtenir un chiffre pair
3. Même question avec un dé à $2n$ faces.

Exercice 8 ★★

On suppose que la probabilité qu'un des réacteurs d'un avion (à plusieurs réacteurs) tombe en panne en cours de vol est $1-p$, indépendamment du comportement des autres moteurs de l'appareil. L'avion peut poursuivre son vol si au moins un réacteur sur deux fonctionne. Pour quelles valeurs de p est-il préférable de voler en avion quadrimoteur plutôt qu'en avion bimoteur ?

Exercice 9 ★★

Dans un étang il y a des gardons et des brochets. Alice pêche à la mouche et prend deux fois plus de gardons que de brochets, alors que Bob, avec sa canne à lancer, attrape autant de gardons que de brochets. Bob est un pêcheur expérimenté : il pêche trois fois plus de poissons que Alice. Les poissons pêchés sont conservés dans le même vivier. On observe au hasard un des poissons pêchés, c'est un brochet. Calculer la probabilité pour que ce soit Bob qui l'ait pêché.

Exercice 10 ★★

On dispose de deux dés A et B.

— le dé A a 4 faces noires et 2 faces blanches,

— le dé B a 2 faces noires et 4 faces blanches.

On lance d'abord une pièce de monnaie truquée : PILE tombe avec une probabilité $p \in]0, 1[$.

Si on obtient PILE on fait des lancers successifs du dé A, et si on obtient FACE on fait des lancers successifs du dé B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir NOIR au premier lancer de dé.
2. Calculer la probabilité d'obtenir NOIR aux deux premiers lancers.
3. Les évènements « obtenir noir au premier lancer »et « obtenir noir au deuxième lancer »sont-ils indépendants ?
4. On a obtenu NOIR aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^*$). Calculer la probabilité d'avoir fait PILE avec la pièce. Déterminer sa limite quand $n \to +\infty$ et interpréter.

Exercice 11 ★★

Dans une entreprise, on fait appel à un technicien lors de ses passages hebdomadaires, pour l'entretien des machines. Chaque semaine, on décide donc pour chaque appareil de faire appel ou non au technicien. Pour un certain type de machines, le technicien constate :

— qu'il doit intervenir la première semaine,

— que s'il est intervenu la n-ième semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n+1)$-ième semaine est égale à $\frac{3}{4}$.

— que s'il n'est pas intervenu la n-ième semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n+1)$-ième semaine est égale à $\frac{1}{10}$.

On désigne par E_n l'évènement : « le technicien intervient la n-ieme semaine »et par p_n la probabilité de E_n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}(E_1)$, $\mathbb{P}(E_{n+1}|E_n)$, $\mathbb{P}(E_{n+1}|{E_n}^c)$, puis, en fonction de p_n, déterminer $\mathbb{P}(E_{n+1} \cap E_n)$ et $\mathbb{P}(E_{n+1} \cap {E_n}^c)$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $p_{n+1} = \frac{13}{20}p_n + \frac{1}{10}$
3. En déduire une expression de p_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 12 ★★

On dispose de deux pièces : la pièce A donne face avec la probabilité $\frac{1}{2}$, la pièce B donne face avec la probabilité $\frac{2}{3}$. On choisit une des pièces uniformément au hasard et on la lance. Si l'on obtient face, on conserve la pièce que l'on vient de lancer, sinon on change de pièce. On effectue ainsi une suite de lancers.

1. On note p_n la probabilité de jouer avec la pièce A au n-ième lancer. Calculer p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire la probabilité d'obtenir face au n-ième lancer.

Exercice 13 ★★★

Au « craps », un joueur lance deux dés de couleurs différentes. Si la somme résultante est $2, 3$ ou 12, le joueur a perdu. Si la somme est 7 ou 11, il gagne. Dans les autres cas, le joueur continue à lancer les dés jusqu'à ce qu'il sorte soit le premier résultat qu'il a tiré, soit 7. Si c'est 7, il perd. Si c'est son résultat initial, il gagne.

On note E_i l'évènement « le résultat initial est i et le joueur finit par gagner »et $E_{i,n}$ l'évènement « la somme initiale est i et le joueur gagne au n^e coup ».

1. Déterminer la probabilité des évènements $E_{i,n}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(E_i) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_{i,n})$, calculer alors $\mathbb{P}(E_i)$.
3. Déterminer la probabilité de gagner sur un jeu.

Exercice 14 ★★★

On effectue $n \geqslant 2$ tirages avec remise dans une urne contenant le même nombre de boules blanches que de boules rouges. Soit A l'événement « on tire au moins deux rouges »et B l'événement « on tire des boules des deux couleurs ». Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si $n = 3$.

Exercice 15 ★★★

On effectue des tirages dans une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires. Après chaque tirage, la boule est remise dans l'urne avec c boules de la même couleur.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité p_n que la première boule blanche soit obtenue au n-ième tirage.
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{b+kc}{a+b+kc}$.
   (a) Montrer que l'on a $p_n = a_{n-1} - a_n$, pour tout $n \geqslant 2$.
   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$ et en déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$. Interpréter.

Exercice 16 ★★

Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce truquée. Le joueur A commence et la pièce amène Face avec la probabilité $p \in]0,1[$. Le premier qui obtient Face gagne le jeu, qui s'arrête alors.

1. Quelle est la probabilité pour que A gagne à son n-ième lancer ?
2. Quelle est la probabilité pour que A gagne ?
3. Quelle est la probabilité pour que le jeu ne s'arrête pas ?
4. Y a-t-il une valeur de p qui assure que les deux joueurs aient la même probabilité de gagner ?

Exercices issus d'oraux

Exercice 17 ★★

(*Oral 2015*)

Une usine fabrique des pièces. 10% des pièces produites sont mauvaises, on leur fait passer un test qui permet d'accepter 91% des bonnes pièces et de retirer 90% des mauvaises.

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit acceptée ?
2. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit bonne bien qu'elle ne soit pas acceptée ?
3. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit mauvaise bien qu'elle soit acceptée ?
4. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur ?

Exercice 18 ★★★

(*Oral 2015*)

Une puce se déplace sur une droite ; au départ elle est à la position $n \in [\![0, N]\!]$. À chaque saut son abscisse augmente de 1 avec une probabilité $p \in]0,1[$ ou diminue de 1 avec la probabilité $q = 1-p$. Elle s'arrête une fois arrivée en 0 ou en N.

On considère les événements A_n : « la puce s'arrête en 0 », B_n : « la puce s'arrête en N »et C_n : « la puce ne s'arrête jamais ». On note $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$.

1. Donner une relation entre a_n, b_n et c_n. Calculer a_0, a_N, b_0 et b_N.
2. On considère l'événement D : « le premier saut est vers la droite »et $G = D^c$. Montrer que, pour $n \in [\![1, N-1]\!]$, $a_n = pa_{n+1} + qa_{n-1}$
3. En déduire a_n en fonction de n, p, q et N (*on traitera séparément le cas* $p = \dfrac{1}{2}$). Faire de même pour b_n.
4. Calculer $a_n + b_n$, conclure.

Exercice 19 ★★★

(*Oral 2017*)

On tire avec remise une boule parmi n boules numérotées de 1 à n.

1. Quelle est la probabilité que la k-ième boule tirée ait le numéro j et que toutes les précédentes aient des numéro strictement inférieurs à j ?
2. En déduire la probabilité que la k-ième soit strictement supérieure à toutes les précédentes.
3. Déterminer la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$

Exercice 20 ★★★

(*Oral 2018*)

On considère un dé équilibré à 6 faces, 2 faces portent le numéro 0, 2 faces le numéro 1 et 2 le numéro 2. On réalise trois lancers successifs indépendants et on note A, B et C les résultats.

1. Calculer la probabilité que $G : Ax + By + C = 0$ soit une droite

   On réalise une seconde de manière indépendante les trois lancers, on note A', B' et C' les nouveaux résultats
2. Calculer la probabilité que $H : A'x + B'y + C' = 0$ soit une droite et la probabilité que G et H soit des droites
3. Sachant que G et H sont des droites, quelle est la probabilité qu'elles soient parallèles ?
4. Sachant que G et H sont des droites, quelle est la probabilité qu'elles soient perpendiculaires ?

Exercice 21 ★★★★

(*Oral 2019, 2021*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. Montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$
2. Deux urnes A et B contiennent n boules numérotées de 1 jusqu'à n. On tire une boule dans A et une boule dans B et on note a et b leurs numéros respectifs. Soit E_n l'événement « a divise b »

(a) Calculer $\mathbb{P}(E_3)$ et $\mathbb{P}(E_4)$

(b) Exprimer $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ à l'aide d'une somme

(c) Déterminer un équivalent de $\mathbb{P}(E_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

1. Notons A l'ensemble des parlementaires ayant voté pour A, B l'ensemble des parlementaires ayant voté pour B et C l'ensemble des parlementaires ayant voté pour C.

   On a alors $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$, d'où, puisque $B \cap A$ et $B \cap A^c$ sont disjoints,

   $$\text{Card }(B) = \text{Card }(B \cap A) + \text{Card }(B \cap A^c) = 117 + 133 = 250$$

2. On a $C = (C \cap A) \cup (C \cap B \cap A^c) \cup (C \cap B^c \cap A^c)$, d'où

   $$\text{Card }(C) = \text{Card }(C \cap A) + \text{Card }(C \cap B \cap A^c) + \text{Card }(C \cap B^c \cap A^c) = 105 + 117 + 27 = 249$$

3. On a

   $$\begin{aligned}\text{Card }(A^c \cap B^c \cap C^c) &= \text{Card }(E) - \text{Card }(A \cup B \cup C)\\ &= \text{Card }(E) - (\text{Card }((A \cup B) \cup (C \cap A^c \cap B^c))\\ &= \text{Card }(E) - \text{Card }((A \cup B) - \text{Card }(C \cap A^c \cap B^c))\\ &= \text{Card }(E) - \text{Card }(A) - \text{Card }(B \cap A^c) - \text{Card }(C \cap A^c \cap B^c)\\ &= 470 - 282 - 133 - 27\\ &= 28\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2

1. Notons M l'ensemble des élèves qui mangent à la cantine le midi et S l'ensemble des élèves qui mangent à la cantine le soir.

   On a alors

   $$\text{Card }(M \cup S) = \text{Card }(M) + \text{Card }(S) - \text{Card }(M \cap S) 25 + 13 - 7 = 31$$

2. On a

   $$\text{Card }(M^c \cap S^c) = \text{Card }(E) - \text{Card }(M \cup S) = 36 - 31 = 5$$

Corrigé de l'exercice 3

n va compter le nombre de choix possibles pour le triplet (a, b, c).

On peut voir dès le début qu'un triplet (a, b, c) tel que $a + b + c = n$ est en fait le triplet $(a, b, n - a - b)$, on n'a de latitude que dans le choix de a et b.

Combien de choix pour a ? A priori on peut prendre n'importe quel nombre entier entre 0 et n (car $a \in \mathbb{N}$ et $n - a = b + c \in \mathbb{N}$) ce qui nous fait $(n + 1)$ choix.

Un fois a choisi, pour b le nombre de choix possibles dépend de a, on a en effet toujours $b \geqslant 0$ et $b \leqslant n - a$, ce qui nous fait $(n + 1 - a)$ choix. Enfin, une fois a et b choisis on n'a plus qu'un seul pour c : $n - a - b$.

Dessin

Si cela vous convient mieux, il ne faut pas hésiter à tracer un arbre pour représenter les choix possibles pour x, y et z et compter les branches.

Au total on a alors

$$\sum_{a=0}^{n}(n+1-a) = \sum_{a=0}^{n}(n+1) - \sum_{a=0}^{n} a = (n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(2n+2-n)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

solutions à cette équation.

Corrigé de l'exercice 4

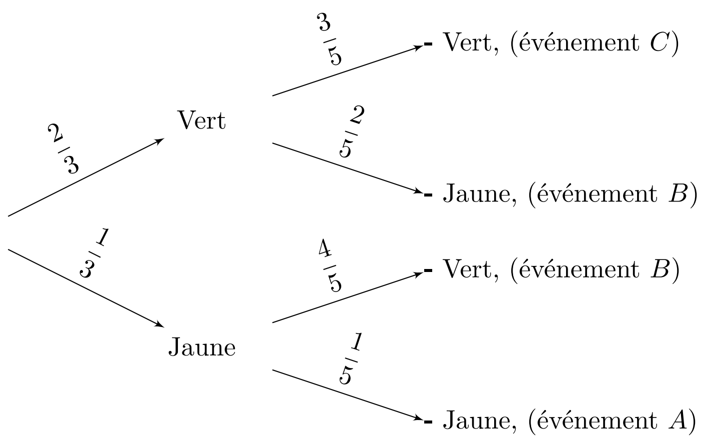
1. Soient A, B et C trois événements.
   (i) A seul se produit
   $$A \cap B^c \cap C^c$$
   (ii) A et C se produisent, mais non B
   $$A \cap C \cap B^c$$
   (iii) les trois événements se produisent
   $$A \cap B \cap C$$
   (iv) l'un au moins des événements se produit
   $$A \cup B \cup C$$
   (v) au moins deux événements se produisent
   $$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
   (vi) un événement au plus se produit, ce qui est la même chose que au moins deux événements ne se produisent pas.
   $$(A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap C^c) \cup (B^c \cap C^c)$$
   (vii) aucun des trois événements ne se produit
   $$A^c \cap B^c \cap C^c$$
   (viii) deux événements exactement se produisent
   $$(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap C \cap B^c) \cup (B \cap C \cap A^c)$$
   (ix) deux événements au plus se produisent.
   $$(A \cap B \cap C)^c$$
2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'événements.
   (i) tous les A_n,
   $$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$
   (ii) au moins un des A_n,
   $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$
   (iii) aucun des A_n,
   $$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} {A_n}^c$$
   (iv) au plus un des A_n,
   $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\neq n} {A_k}^c$$
   (v) exactement un des A_n,
   $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcap_{k\neq n} {A_k}^c \right)$$
   (vi) tous les A_n à partir d'un certain rang.
   $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geqslant n} A_k$$

Corrigé de l'exercice 5

1. On note T l'événement « le test est positif »et M l'événement « La personne est malade ».
   On a alors $\mathbb{P}(M) = \dfrac{1}{1000}$, $\mathbb{P}(T|M) = \dfrac{99}{100}$, $\mathbb{P}(T|M^c) = \dfrac{2}{1000}$.
   D'après la formule des probabilités totales on a
   $$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T|M^c)\mathbb{P}(M^c) = \frac{99}{100}\frac{1}{1000} + \frac{2}{1000}\frac{999}{1000} = \frac{747}{250000}$$
   D'après la formule de Bayes on a
   $$\mathbb{P}(M|T) = \frac{\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T)}\mathbb{P}(T|M) = \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{747}{250000}}\frac{99}{100} = \frac{55}{166} \simeq 0.33$$
   La probabilité qu'une personne ayant obtenu un résultat positif soit réellement malade est donc d'environ $\dfrac{1}{3}$.
2. On pourrait (à tort) penser que ce test est alors mauvais. Ce n'est pas le cas. On peut en effet prouver qu'il est impossible mathématiquement de simultanément maximiser la probabilité de détecter les personnes réellement malades et la probabilité qu'un test positif révèle une personne effectivement malade. Il faut alors faire un compromis, préfère-t-on ne pas détecter des personnes malades qui peuvent alors éventuellement propager la maladie (ce qu'on appelle en statistique une erreur de première espèce) ou simplement voir leur santé empirer sans traitement ou détecter à tort des personnes saines dont on s'apercevra lors de tests subséquents de la bonne santé (erreur de seconde espèce) ?

Corrigé de l'exercice 6

1. On va construire un arbre de probabilité pour le premier tirage



   Puis deux arbres pour le second tirage selon si le premier tirage a aboutit à la situation B ou C :

   Dans la situation A, il n'y a plus de boules jaunes dans l'urne donc la seule possibilité est de tirer deux boules vertes

Figure .1 – Arbre dans la situation B

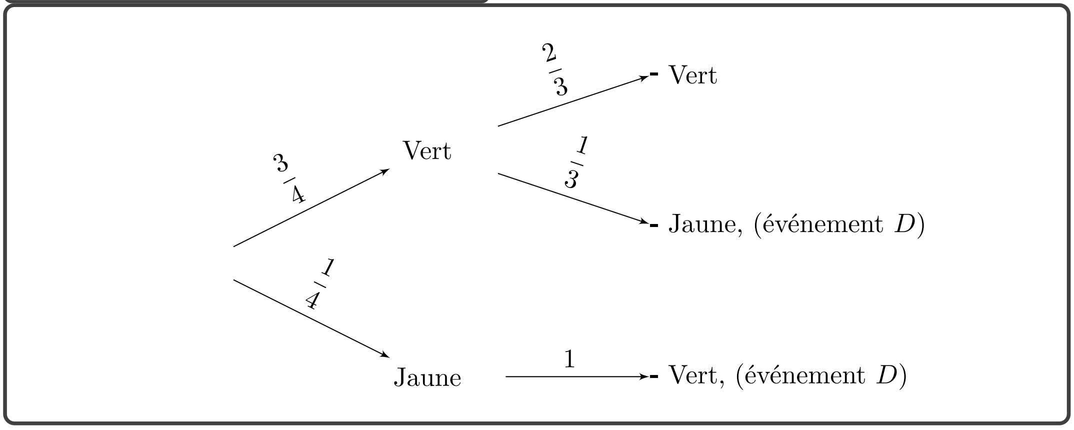
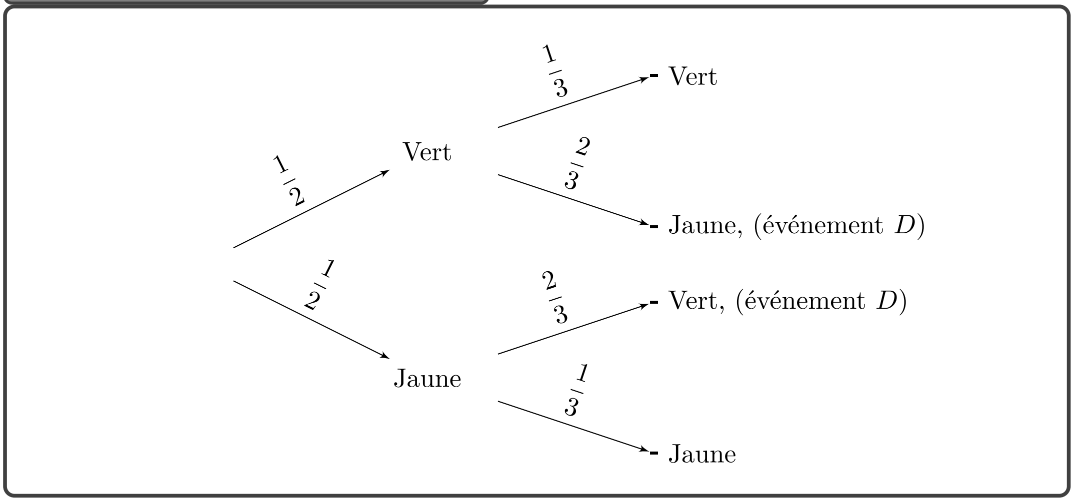


Figure .2 – Arbre dans la situation C



On voit alors que $\mathbb{P}_A(D) = 0$,

$$\mathbb{P}_B(D) = \frac{3}{4}\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}_C(D) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

2. On a alors

$$\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}_A(D)\mathbb{P}(A) = 0$$

$$\mathbb{P}(B \cap D) = \mathbb{P}_B(D)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{15}$$

$$\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}_c(D)\mathbb{P}(C) = \frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{3}{5} = \frac{4}{15}$$

3. D'après la formule des probabilités totale on a

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D \cap A) + \mathbb{P}(D \cap B) + \mathbb{P}(D \cap C) = \frac{8}{15}$$

Corrigé de l'exercice 7

1. Soit C la constante de proportionnalité, c'est-à-dire le réel tel que

$$\mathbb{P}(\{1\}) = 1C \quad \mathbb{P}(\{2\}) = 2C \quad \cdots \quad \mathbb{P}(\{6\}) = 6C$$

On a alors

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}([\![1,6]\!]) = C \times \sum_{i=1}^{6} k = C \times \frac{6 \times 7}{2} = 21C$$

Comme $1 = 21C$ on a alors $C = \dfrac{1}{21}$.

2. Notons A l'événement « Obtenir un chiffre pair ». Alors $A = \{2, 4, 6\}$ et

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}(\{2k\}) = \sum_{k=1}^{3} \frac{2k}{21} = \frac{2}{21} \times \frac{3 \times 4}{2} = \frac{12}{21}$$

3. On reprend notre méthode dans le cas d'un dé à $2n$ faces.

Soit C la constante de proportionnalité, c'est-à-dire le réel tel que

$$\mathbb{P}(\{1\}) = 1C \quad \mathbb{P}(\{2\}) = 2C \quad \cdots \quad \mathbb{P}(\{2n\}) = 2nC$$

On a alors

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}([\![1, 2n]\!]) = C \times \sum_{i=1}^{2n} k = C \times \frac{(2n) \times (2n+1)}{2} = Cn(2n+1)$$

Comme $1 = n(2n+1)C$ on a alors $C = \dfrac{1}{n(2n+1)}$.

4. Notons A l'événement « Obtenir un chiffre pair ». Alors $A = \{2k\ ,\ k \in [\![1, n]\!]\}$ et

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{2k\}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{n(2n+1)} = \frac{2}{n(2n+1)} \times \frac{n \times (n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n+1}$$

Corrigé de l'exercice 8

Le quadrimoteur va s'écraser si 3 ou plus de ses moteurs tombent en panne. Chaque moteur a une probabilité $1-p$ de tomber en panne indépendamment des autres moteurs. L'avion va donc s'écraser dans 4 situations incompatibles entre elles :

— $P_1P_2P_3M_4$ (les moteurs $1, 2$ et 3 tombent en panne) ce qui arrive avec probabilité $p(1-p)^3$
— $P_1P_2M_3P_4$ (les moteurs $1, 2$ et 4 tombent en panne) ce qui arrive avec probabilité $p(1-p)^3$
— $P_MP_2P_3P_4$ (les moteurs $1, 3$ et 4 tombent en panne) ce qui arrive avec probabilité $p(1-p)^3$
— $M_1P_2P_3P_4$ (les moteurs $2, 3$ et 4 tombent en panne) ce qui arrive avec probabilité $p(1-p)^3$
— $P_1P_2P_3P_4$ (les moteurs $1, 2, 3$ et 4 tombent en panne) ce qui arrive avec probabilité $(1-p)^4$

Ainsi $\mathbb{P}($ Le quadrimoteur s'écrase $) = 4p(1-p)^3 + (1-p)^4$

Le bimoteur lui s'écrasera si ses deux moteurs tombent en panne, ce qui arrive avec probabilité $(1-p)^2$.

Il nous faut trouver pour quelles valeurs de p on a $4p(1-p)^3 + (1-p)^4 \leqslant (1-p)^2$

$$\begin{aligned}
4p(1-p)^3 + (1-p)^4 \leqslant (1-p)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 4p(1-p)^3 + (1-p)^4 - (1-p)^2 \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (1-p)^2 \left(4p(1-p) + (1-p)^2 - 1\right) \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (1-p)^2 \left(4p - 4p^2 + 1 - 2p + p^2 - 1\right) \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (1-p)^2 \left(2p - 3p^2\right) \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \quad p(1-p)^2 (2-3p) \leqslant 0
\end{aligned}$$

On a $p \geqslant 0$ (et il est vraiment souhaitable que $p \neq 0$) et $(1-p)^2 \geqslant 0$. Ainsi il est préférable de voler en quadrimoteur si $2 - 3p \leqslant 0$, c'est-à-dire si $p \geqslant \dfrac{2}{3}$.

Si les ingénieurs font bien leur travail il est raisonnable de penser que p est très proche de 1 et donc les quadrimoteurs sont plus sûrs que les bimoteurs.

Corrigé de l'exercice 9

Formalisons le problème avec des probabilités, les données de l'énoncé s'interprètent ainsi :

— $\mathbb{P}($ Le poisson observé est un brochet | Le poisson a été péché par Alice $) = \frac{1}{3}$. En effet Alice a pris deux fois plus de gardons que de brochets soit une proportion $\frac{2}{3}$ de gardons et $\frac{1}{3}$ de brochets.

— $\mathbb{P}($ Le poisson observé est un brochet | Le poisson a été péché par Bob$) = \frac{1}{2}$. En effet Bob a pris autant de gardons que de brochets soit une proportion $\frac{1}{2}$ de gardons et $\frac{1}{2}$ de brochets.

— $\mathbb{P}($ Le poisson a été péché par Alice$) = \frac{1}{4}$, en effet Bob a pris trois fois plus de poissons qu'Alice, soit une proportion de $\frac{1}{4}$ de poissons péchés par Alice et de $\frac{3}{4}$ de poissons péchés par Bob

— $\mathbb{P}($ Le poisson a été péché par Bob$) = \frac{3}{4}$

D'après la formule des probabilités totales on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{ Le poisson est un brochet}) \\
&= \mathbb{P}(\text{ Le poisson est un brochet} \mid \text{Le poisson a été péché par Alice })\mathbb{P}(\text{ Le poisson a été péché par Alice}) \\
&\quad + \mathbb{P}(\text{ Le poisson est un brochet} \mid \text{Le poisson a été péché par Bob})\mathbb{P}(\text{ Le poisson a été péché par Bob}) \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{3}{4} \\
&= \frac{11}{24}
\end{aligned}$$

La formule de Bayes nous donne alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{ Le poisson a été péché par Bob} \mid \text{Le poisson est un brochet }) \\
&= \frac{\mathbb{P}(\text{ Le poisson a été péché par Bob })}{\mathbb{P}(\text{ Le poisson est un brochet })}\mathbb{P}(\text{ Le poisson est un brochet} \mid \text{Le poisson a été péché par Bob }) \\
&= \frac{\frac{3}{4}}{\frac{11}{24}}\frac{1}{2} \\
&= \frac{9}{11}
\end{aligned}$$

Le poisson a donc une probabilité de $\frac{9}{11}$ d'avoir été péché par Bob.

Corrigé de l'exercice 10

1. Notons P l'événement « La pièce tombe sur Pile », N l'événement « Le premier lancer de dé donne Noir »et NN l'événement « Les deux premiers lancers de dés donnent Noir ».

   D'après la formule des probabilités totales on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N) &= \mathbb{P}(N|P)\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(N|P^c)\mathbb{P}(P^c) \\
&= \frac{2}{3}p + \frac{1}{3}(1-p) \\
&= \frac{1+p}{3}
\end{aligned}$$

2. D'après la formule des probabilités totales on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(NN) &= \mathbb{P}(NN|P)\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(NN|P^c)\mathbb{P}(P^c) \\
&= \frac{2}{3}\frac{2}{3}p + \frac{1}{3}\frac{1}{3}(1-p) \\
&= \frac{1+3p}{9}
\end{aligned}$$

3. Notons N_2 l'événement « Obtenir Noir au second lancer ». On montre de la même manière que pour N que $\mathbb{P}(N_2) = \frac{1+p}{3}$.

On a $N \cap N_2 = NN$, $\mathbb{P}(N) \times \mathbb{P}(N_2) = \dfrac{(1+p)^2}{9}$ et $\mathbb{P}(NN) = \dfrac{1+3p}{9}$

Ainsi N et N_2 sont indépendants si et seulement si $(1+p)^2 = 1+3p$

De plus on a

$$\begin{aligned}(1+p)^2 = 1+3p &\Leftrightarrow 1+2p+p^2 = 1+3p\\ &\Leftrightarrow p^2 - p = 0\\ &\Leftrightarrow p(p-1) = 0\end{aligned}$$

Comme $p \in]0,1[$ on peut alors conclure que n et N_2 ne sont pas indépendants.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, notons N_n l'événement « On a obtenu NOIR aux n premiers coups »($n \in \mathbb{N}^*$).

   On a alors
   $$\mathbb{P}(N_n|P) = \frac{2^n}{3^n} \qquad \mathbb{P}(N_n|P^c) = \frac{1}{3^n}$$
   D'après la formule des probabilités totales on a alors
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_n) &= \mathbb{P}(N_n|P)\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(N_n|P^c)\mathbb{P}(P^c)\\ &= \frac{1+p(2^n-1)}{3^n}\end{aligned}$$
   D'après la formule de Bayes on a
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(P|N_n) &= \frac{\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(N_n)}\mathbb{P}(N_n|P)\\ &= \frac{p3^n}{1+p(2^n-1)}\frac{2^n}{3^n}\\ &= \frac{2^n p}{(2^n-1)p+1}\\ &= \frac{p}{p+\frac{1-p}{2^n}}\end{aligned}$$
   On voit immédiatement que
   $$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(P|N_n) = \frac{p}{p} = 1$$

Corrigé de l'exercice 11

1. Par hypothèse on a $\mathbb{P}(E_1) = 1$, $\mathbb{P}(E_{n+1}|E_n) = \dfrac{3}{4}$, $\mathbb{P}(E_{n+1}|{E_n}^c) = \dfrac{1}{10}$.

   Puis, $\mathbb{P}(E_{n+1} \cap E_n) = \mathbb{P}(E_{n+1}|E_n)\mathbb{P}(E_n) = \dfrac{3p_n}{4}$ et $\mathbb{P}(E_{n+1} \cap {E_n}^c) = \mathbb{P}(E_{n+1}|{E_n}^c)\mathbb{P}({E_n}^c) = \dfrac{1-p_n}{10}$.
2. La formule des probabilités totales nous donne alors
   $$\begin{aligned}p_{n+1} &= \mathbb{P}(E_{n+1} \cap E_n) + \mathbb{P}(E_{n+1} \cap {E_n}^c)\\ &= \frac{3p_n}{4} + \frac{1-p_n}{10}\\ &= \frac{15p_n}{20} + \frac{2-2p_n}{20}\\ &= \frac{13p_n}{20} + \frac{1}{10}\end{aligned}$$
3. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. Soit $r \in \mathbb{R}$ l'unique réel tel que $r = \dfrac{13r}{20} + \dfrac{1}{10}$, c'est-à-dire $r = \dfrac{2}{7}$. La suite $\left(p_n - \dfrac{2}{7}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite géométrique de raison $\dfrac{13}{20}$, d'où, pour $n \in \mathbb{N}^*$
   $$p_n - \frac{2}{7} = \left(\frac{13}{20}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{2}{7}\right)$$

D'où

$$p_n = \frac{2}{7} + \left(\frac{13}{20}\right)^{n-1} \frac{5}{7}$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} = \frac{2}{7}$

Corrigé de l'exercice 12

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ on va noter A_n l'événement « On joue avec la pièce A au n-ième lancer »et B_n l'événement « On joue avec la pièce B au n-ième lancer ».

   D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (A_n, B_n) on a

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n)\\ &= \mathbb{P}(\text{Face}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(\text{Pile}|B_n)\mathbb{P}(B_n)\\ &= \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}(1-p_n)\\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}p_n\end{aligned}$$

   La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. Notons ℓ l'unique réel tel que $\ell = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\ell$ i.e. $\ell = \frac{2}{5}$.

   Ainsi

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{6^{n-1}}\left(p_1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5} + \frac{1}{6^{n-1}}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5} + \frac{1}{6^{n-1}}\frac{1}{10}$$

2. Notons F_n l'événement « Faire Face au n-ième lancer ».

   D'après la formule des probabilités totales appliquées au système complet d'événements (A_n, B_n) on a

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_n) &= \mathbb{P}(F_n|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(F_n|B_n)\mathbb{P}(B_n)\\ &= \frac{1}{2}p_n + \frac{2}{3}(1-p_n)\\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{6}p_n\\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{15} - \frac{1}{10}\frac{1}{6^n}\\ &= \frac{3}{5} - \frac{1}{10}\frac{1}{6^n}\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 13

1. On a aisément

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(E_{2,n}) = \mathbb{P}(E_{3,n}) = \mathbb{P}(E_{12,n}) = 0$$

   Et

   $$\mathbb{P}(E_{7,1}) = \mathbb{P}(E_{11,1}) = 1, \qquad \forall n \geqslant 2, \qquad \mathbb{P}(E_{7,n}) = \mathbb{P}(E_{11,n}) = 0$$

   Soit maintenant $i \in \{4,5,6,8,9,10\}$, on a alors $\mathbb{P}(E_{i,1}) = 0$.

   Le joueur gagne à l'instant $n \geqslant 2$ s'il fait i à l'instant 1 et à l'instant n et s'il n'a fait que des résultats différents de i et 7 aux lancers.

   Le tableau suivant résume les probabilités des différents résultats lors d'un lancer de 2 dés

Résultat	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilité	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Les lancers successifs étant indépendants, on a alors, pour $n \geqslant 2$

$$\mathbb{P}(E_{4,n}) = \frac{3}{36}\left(1 - \frac{3}{36} - \frac{6}{36}\right)^{n-2}\frac{3}{36} = \left(\frac{27}{36}\right)^{n-2}\left(\frac{3}{36}\right)^2$$

$$\mathbb{P}(E_{5,n}) = \frac{4}{36}\left(1 - \frac{4}{36} - \frac{6}{36}\right)^{n-2}\frac{4}{36} = \left(\frac{26}{36}\right)^{n-2}\left(\frac{4}{36}\right)^2$$

$$\mathbb{P}(E_{6,n}) = \frac{5}{36}\left(1 - \frac{5}{36} - \frac{6}{36}\right)^{n-2}\frac{5}{36} = \left(\frac{25}{36}\right)^{n-2}\left(\frac{5}{36}\right)^2$$

$$\mathbb{P}(E_{8,n}) = \frac{5}{36}\left(1 - \frac{5}{36} - \frac{6}{36}\right)^{n-2}\frac{5}{36} = \left(\frac{25}{36}\right)^{n-2}\left(\frac{5}{36}\right)^2$$

$$\mathbb{P}(E_{9,n}) = \frac{4}{36}\left(1 - \frac{4}{36} - \frac{6}{36}\right)^{n-2}\frac{4}{36} = \left(\frac{26}{36}\right)^{n-2}\left(\frac{4}{36}\right)^2$$

$$\mathbb{P}(E_{10,n}) = \frac{3}{36}\left(1 - \frac{3}{36} - \frac{6}{36}\right)^{n-2}\frac{3}{36} = \left(\frac{27}{36}\right)^{n-2}\left(\frac{3}{36}\right)^2$$

Ou, de manière condensée

$$\mathbb{P}(E_{i,n}) = \left(\frac{24 + |i-7|}{36}\right)^{n-2}\left(\frac{6 - |i-7|}{36}\right)^2$$

2. On a $E_i = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} E_{i,n}$ et les événements $(E_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux-à-deux disjoints, ainsi $\mathbb{P}(E_i) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(E_{i,n})$.

   On a alors, en exploitant les résultats précédents,

$$\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(E_3) = \mathbb{P}(E_12) = 0, \qquad \mathbb{P}(E_7) = \frac{1}{6}, \qquad \mathbb{P}(E_11) = \frac{2}{36}$$

   Et, pour $i \in \{4, 5, 6, 8, 9, 10\}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_i) &= \sum_{n=2}^{+\infty}\mathbb{P}(E_{i,n}) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{24 + |i-7|}{36}\right)^{n-2}\left(\frac{6 - |i-7|}{36}\right)^2 \\
&= \left(\frac{6 - |i-7|}{36}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{24+|i-7|}{36}} \\
&= \frac{(6 - |i-7|)^2}{36\,(36 - 24 - |i-7|)} \\
&= \frac{(6 - |i-7|)^2}{36\,(12 - |i-7|)}
\end{aligned}$$

   D'où

$$\mathbb{P}(E_4) = \mathbb{P}(E_{10}) = \frac{(6-3)^2}{36\,(12-3)} = \frac{1}{36}$$

$$\mathbb{P}(E_5) = \mathbb{P}(E_9) = \frac{(6-2)^2}{36\,(12-2)} = \frac{2}{45}$$

$$\mathbb{P}(E_6) = \mathbb{P}(E_8) = \frac{(6-1)^2}{36\,(12-1)} = \frac{25}{396}$$

3. La probabilité de gagner est $\sum_{i=2}^{12}\mathbb{P}(E_i)$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{12}\mathbb{P}(E_i) &= 2\left(\mathbb{P}(E_4)+\mathbb{P}(E_5)+\mathbb{P}(E_6)\right)+\mathbb{P}(E_7)+\mathbb{P}(E_{11})\\ &= 2\left(\frac{1}{36}+\frac{2}{45}+\frac{25}{396}\right)+\frac{1}{6}+\frac{2}{36}\\ &= \frac{244}{495}\\ &\simeq 0.49\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 14

On fait une hypothèse d'équiprobabilité et d'indépendance sur les tirages.

Plutôt que de déterminer la probabilité d'avoir au moins deux boules rouges, on va déterminer la probabilité de l'événement contraire « Avoir 0 ou 1 boules rouges »

À chaque étape, la probabilité de tirer une boule blanche est $\frac{1}{2}$, d'où, par indépendance, la probabilité de ne pas tirer de boule rouge est $\frac{1}{2^n}$.

Tous les tirages étant équiprobables pour déterminer la probabilité de tirer exactement une boule rouge on va compter le nombre de tirages comptant exactement une boule rouge. Un tel tirage est entièrement caractérisé par le rang d'arrivée de la boule rouge, il y en a donc n (n positions possibles pour la boule rouge). Ainsi la probabilité d'obtenir exactement une boule rouge est $\frac{n}{2^n}$.

On en déduit que $\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^n}$.

De même on va déterminer $\mathbb{P}(B^c)$, l'événement B^c est « N'obtenir que des boules blanches ou n'obtenir que des boules rouges »

La probabilité de ne pas tirer de boule blanche est $\frac{1}{2^n}$, de même pour la probabilité de na pas obtenir de boules rouges.

On en déduit que $\mathbb{P}(B) = 1 - \frac{2}{2^n}$

Pour déterminer $\mathbb{P}(A\cap B)$ on va utiliser la relation $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cup B)$.

L'événement $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$ est l'événement « N'avoir que des boules rouges »

Ainsi $\mathbb{P}((A\cup B)^c) = \frac{1}{2^n}$ et donc $\mathbb{P}(A\cup B) = 1-\frac{1}{2^n}$

Finalement

$$\mathbb{P}(A\cap B) = 1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^n}+1-\frac{2}{2^n}-\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 1-\frac{n+2}{2^n}$$

Pour $n=3$, $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B)=\frac{3}{4}$ et $\mathbb{P}(A\cap B)=\frac{3}{8}$. Les événements sont bien indépendants.

Dans le cas général, si l'on réduit au même dénominateur, on trouve

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{1}{2^{2n}}(2^{2n}-(n+2)2^n)$$

et

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2^{2n}}(2^{2n}-(n+3)2^n+2(n+1)) = \frac{1}{2^{2n}}(2^{2n}-(n+2)2^n-2^n+2(n+1))$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \quad\Leftrightarrow\quad 2^n = 2(n+1)$$

On peut prouver par récurrence que, pour tout $n\geqslant 4$, $2^n > 2(n+1)$

On en déduit que pour $n\geqslant 4$, A et B ne sont pas indépendants.

Pour $n=2$, $\mathbb{P}(A\cap B)=0$, et $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\neq 0$, donc A et B ne sont pas indépendants.

Finalement, A et B sont indépendants si et seulement si $n=3$.

Corrigé de l'exercice 15

1. La boule blanche est obtenue pour la première fois au n-ième tirage si les $n-1$ premiers tirages ont amenés des boules noires et le n-ième une boule blanche.

   Pour $k\in\mathbb{N}$ notons B_k l'événement « la boule obtenue au k-ième tirage est blanche »et N_k l'événement « la boule obtenue au k-ième tirage est blanche »

   D'après la formule des probabilités composées on a

$$\begin{aligned}p_n &= \mathbb{P}(B_n\cap N_{n-1}\cap N_{n-2}\cap\cdots\cap N_1)\\ &= \mathbb{P}\left(B_n\middle|\bigcap_{k=1}^{n-1}N_k\right)\times\prod_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}\left(N_i\middle|\bigcap_{k=1}^{i-1}N_k\right)\end{aligned}$$

   Après l'événement $\bigcap_{k=1}^{i-1}N_k$ l'urne contient a boules blanches et $b+(i-1)c$ boules noires, ainsi

$$\mathbb{P}\left(N_i\middle|\bigcap_{k=1}^{i-1}N_k\right)=\frac{b+(i-1)c}{a+b+(i-1)c}$$

   et

$$\mathbb{P}\left(B_n\middle|\bigcap_{k=1}^{n-1}N_k\right)=\frac{a}{a+b+(n-1)c}$$

   Ainsi

$$\begin{aligned}p_n &= \mathbb{P}\left(B_n\middle|\bigcap_{k=1}^{n-1}N_k\right)\times\prod_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}\left(N_i\middle|\bigcap_{k=1}^{i-1}N_k\right)\\ &= \frac{a}{a+b+(n-1)c}\times\prod_{i=1}^{n-1}\frac{b+(i-1)c}{a+b+(i-1)c}\\ &= \frac{a}{a+b+(n-1)c}\times\prod_{k=0}^{n-2}\frac{b+kc}{a+b+kc}\end{aligned}$$

> **Indépendance**
> Puisque le résultat d'un tirage influence la composition de l'urne lors des tirages successifs les événements $(B_k)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas indépendants.

2. (a) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{b+kc}{a+b+kc}$.

   On a alors, pour $n\geqslant 2$

$$\begin{aligned}a_{n-1}-a_n &= \prod_{k=0}^{n-2}\frac{b+kc}{a+b+kc}-\prod_{k=0}^{n-1}\frac{b+kc}{a+b+kc}\\ &= \left(1-\frac{b+(n-1)c}{a+b+(n-1)c}\right)\prod_{k=0}^{n-2}\frac{b+kc}{a+b+kc}\\ &= \frac{a+b+(n-1)c-(b+(n-1)c)}{a+b+(n-1)c}\prod_{k=0}^{n-2}\frac{b+kc}{a+b+kc}\\ &= \frac{a}{a+b+(n-1)c}\times\prod_{k=0}^{n-2}\frac{b+kc}{a+b+kc}\\ &= p_n\end{aligned}$$

> **a_n**
> Un calcul similaire à celui de la question précédente nous aurait amené $\mathbb{P}(n \text{ tirages Noirs})=a_n$, ce qui explique la formule attendue

   (b) Tous les réels a_n sont strictement positifs en tant que produits de réels strictement positifs. On a alors

$$\ln(a_n)=\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\frac{b+kc}{a+b+kc}\right)$$

Or, pour $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{b+kc}{a+b+kc}\right) &= \ln\left(1-\frac{a}{a+b+kc}\right)\\ &\underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{a}{a+b+kc}\\ &\underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{a}{kc}+o\left(\frac{1}{k}\right)\end{aligned}$$

Or la série $\sum_k \frac{a}{kc}$ est une série de Riemann divergente, ainsi, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs $\sum -\ln\left(\frac{b+kc}{a+b+kc}\right)$ diverge.

Puisque la série $\sum -\ln\left(\frac{b+kc}{a+b+kc}\right)$ est une série à termes positifs divergente on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} -\ln\left(\frac{b+kc}{a+b+kc}\right) = +\infty$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(a_n) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Pour $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{n=1}^{N} p_n = p_1 + \sum_{n=2}^{N} a_{n-1} - a_n = p_1 + a_1 - a_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} p_1 + a_1$$

Ainsi $\sum p_n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} = p_1 + a_1 = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$$

Les événements P_n : « La première boule blanche est obtenue au n-ième tirages »sont deux-à-deux incompatibles, ainsi $\sum \mathbb{P}(P_n)$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(P_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n\right) = \mathbb{P}\left(\text{On obtient au moins une fois une boule blanche }\right)$$

Ainsi $\mathbb{P}\left(\text{On obtient au moins une fois une boule blanche }\right) = 1$.

En d'autres termes, bien que la probabilité d'obtenir une boule blanche après une certain nombre de boules noires soit de plus en plus faible, il est presque sûr que l'on va tirer une boule blanche à un moment.

Corrigé de l'exercice 16

On va supposer les tirages successifs indépendants

1. A gagne à son n-ième lancer si A fait Face à son n-ième lancer, A a fait Pile à ses $n-1$ lancers précédents et B a fait Pile a ses $n-1$ lancers.

   Ainsi, par indépendance des lancers, A gagne à son n-ième lancer avec une probabilité $p(1-p)^{2n-2}$

2. Les événements A_n : « A gagne à son n-ième lancer »sont deux-à-deux incompatibles, ainsi $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge et

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\text{A gagne}\right)$$

   Ainsi

   $$\mathbb{P}\left(\text{A gagne}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{2n-2} = p\frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2p-p^2} = \frac{1}{2-p}$$

3. De manière similaire à la question précédente on a

$$\mathbb{P}\left(\text{B gagne}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{2n-1} = p(1-p)\frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}$$

Le jeu ne s'arrête pas si et seulement si aucun des joueurs ne gagne. Or les événements « A gagne »et « B gagne »sont incompatibles, ainsi

$$\mathbb{P}(\text{A ou B gagne}) = \mathbb{P}\left(\text{A gagne}\right) + \mathbb{P}\left(\text{B gagne}\right) = \frac{1}{2-p} + \frac{1-p}{2-p} = \frac{1+1-p}{2-p} = 1$$

La probabilité que le jeu ne s'arrête jamais est donc nul.

4. On a

$$\mathbb{P}\left(\text{B gagne}\right) = \frac{1-p}{2-p} = \mathbb{P}\left(\text{A gagne}\right) - \frac{p}{2-p}$$

Ainsi, le jeu est équitable si et seulement si $p = 0$ ce qui n'est le cas par hypothèse. Quelle que soit la valeur de p, le joueur A est avantagé.

Corrigé de l'exercice 17

1. Notons M l'événement « la pièce est mauvaise »et A l'événement « la pièce est acceptée ».

D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements (M, M^c) on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(A|M^c)\mathbb{P}(M^c)\\ &= \frac{1}{10}\frac{1}{10} + \frac{9}{10}\frac{9}{10}\\ &= \frac{82}{100}\end{aligned}$$

2. D'après la formule de Bayes on a

$$\mathbb{P}(M^c|A^c) = \frac{\mathbb{P}(M^c)\mathbb{P}(A^c|M^c)}{\mathbb{P}(A^c)} = \frac{\frac{9}{10}\frac{9}{100}}{\frac{18}{100}} = \frac{81}{180} = \frac{9}{20}$$

3. D'après la formule de Bayes on a

$$\mathbb{P}(M|A) = \frac{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}(A|M)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{10}\frac{1}{10}}{\frac{82}{100}} = \frac{1}{82}$$

Piège ?

Il peut être tentant ici d'additionner les résultats des deux questions précédentes, cela n'aurait toutefois aucun sens mathématiquement, les deux probabilités calculées précédemment sont des probabilités conditionnelles relativement à des événements différents et correspondent ainsi à des problèmes différents.

4. Il y a une erreur lorsque l'on rejette une bonne pièce ou lorsque que l'on accepte une mauvaise pièce, il s'agit donc de l'événement $(M^c \cap A^c) \cup M \cap A$.

Les deux événements $M^c \cap A^c$ et $M \cap A$ sont incompatibles, ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left((M^c \cap A^c) \cup M \cap A\right) &= \mathbb{P}(M^c \cap A^c) + \mathbb{P}(M \cap A)\\ &= \mathbb{P}(A^c)|M^c)\mathbb{P}(M^c) + \mathbb{P}(A|M)\mathbb{P}(M)\\ &= \frac{9}{100}\frac{9}{10} + \frac{1}{10}\frac{1}{10}\\ &= \frac{91}{1000}\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 18

1. Pour tout $n \in [\![0, N]\!]$ on a $a_n + b_n + c_n = 1$.

De plus $a_0 = 1$, $a_N = 0$, $b_0 = 0$ et $b_N = 1$

2. Soit $n \in [\![1, N-1]\!]$,

   D'après la formule des probabilités totales on a

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_n|G)\mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(A_n|D)\mathbb{P}(D) = q\mathbb{P}(A_n|G) + p\mathbb{P}(A_n|D)$$

   Or, partant de n, si l'événement G est réalisé alors on se trouve désormais à la position $n-1$. Puisque les sauts sont indépendants, la probabilité de s'arrêter en 0 est alors la même que si on avait commencé directement en $n-1$ (en quelque sorte on peut oublier le passé), ainsi $\mathbb{P}(A_n|G) = \mathbb{P}(A_{n-1}) = a_{n-1}$.

   De même $\mathbb{P}(A_n|D) = a_{n+1}$.

   Finalement

$$\forall n \in [\![1, N-1]\!], \qquad a_n = pa_{n+1} + qa_{n-1}$$

   La suite $(a_n)_{n\in[\![0,N]\!]}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. son équation caractéristique est $r = pr^2 + q$ i.e. $pr^2 - r + 1 - p = 0$.

   Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1 - 4p(1-p) = 1 - 4p + 4p^2 = (2p-1)^2$.

   Inégalité classique

   On en déduit que, pour tout $p \in [0,1]$, $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$ avec égalité si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.

   — Si $p \neq \frac{1}{2}$ alors l'équation caractéristique a pour solutions $r_1 = \frac{1+2p-1}{2p} = 1$ et $r_2 = \frac{1-2p+1}{2p} = \frac{1-p}{p}$.

   Il existe alors $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in [\![0, N]\!], \qquad a_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

   Or $a_0 = 1$ et $a_N = 0$ d'où $\begin{cases} \lambda + \mu & = 1 \\ \lambda + \mu \dfrac{(1-p)^N}{p^N} & = 0 \end{cases}$

   Ainsi $\mu = \dfrac{p^N}{p^N - (1-p)^N}$ et $\lambda = \dfrac{-(1-p)^N}{p^N - (1-p)^N}$.

   On en déduit que,

$$\forall n \in [\![0, N]\!], \qquad a_n = \frac{p^N \left(\frac{1-p}{p}\right)^n - (1-p)^N}{p^N - (1-p)^N}$$

   — Si $p = \frac{1}{2}$ alors l'équation caractéristique $\frac{1}{2}r^2 - r + \frac{1}{2}$ a pour solution $r = 1$

   Il existe alors $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in [\![0, N]\!], \qquad a_n = \lambda r^n + \mu n r^n$$

   Or $a_0 = 1$ et $a_N = 0$ d'où $\begin{cases} \lambda & = 1 \\ \lambda + \mu N & = 0 \end{cases}$

   Ainsi $\mu = \dfrac{-1}{N}$.

   On en déduit que,

$$\forall n \in [\![0, N]\!], \qquad a_n = 1 - \frac{n}{N}$$

   On procède de manière similaire pour b_n :

$$\forall n \in [\![1, N-1]\!], \qquad b_n = pb_{n+1} + qb_{n-1}$$

   La suite $(b_n)_{n\in[\![0,N]\!]}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. son équation caractéristique est $r = pr^2 + q$ i.e. $pr^2 - r + 1 - p = 0$.

— Si $p \neq \frac{1}{2}$ alors l'équation caractéristique a pour solutions $r_1 = \frac{1+2p-1}{2p} = 1$ et $r_2 = \frac{1-2p+1}{2p} = \frac{1-p}{p}$.

Il existe alors $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in [\![0,N]\!], \qquad b_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

Or $b_0 = 0$ et $b_N = 1$ d'où $\begin{cases} \lambda + \mu & = 0 \\ \lambda + \mu \dfrac{(1-p)^N}{p^N} & = 1 \end{cases}$

Ainsi $\mu = \dfrac{p^N}{(1-p)^N - p^N}$ et $\lambda = \dfrac{-p^N}{(1-p)^N - p^N}$.

On en déduit que,

$$\forall n \in [\![0,N]\!], \qquad b_n = \frac{p^N\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - p^N}{(1-p)^N - p^N}$$

— Si $p = \frac{1}{2}$ alors l'équation caractéristique $\frac{1}{2}r^2 - r + \frac{1}{2}$ a pour solution $r = 1$

Il existe alors $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in [\![0,N]\!], \qquad a_n = \lambda r^n + \mu n r^n$$

Or $b_0 = 0$ et $b_N = 1$ d'où $\begin{cases} \lambda & = 0 \\ \lambda + \mu N & = 1 \end{cases}$

Ainsi $\mu = \dfrac{1}{N}$.

On en déduit que,

$$\forall n \in [\![0,N]\!], \qquad b_n = \frac{n}{N}$$

3. On traite de nouveau séparément les cas $p \neq 12$ et $p = \frac{1}{2}$

— Si $p \neq \frac{1}{2}$ alors, pour $n \in [\![0,N]\!]$, on a

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= \frac{p^N\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - (1-p)^N}{p^N - (1-p)^N} + \frac{p^N\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - p^N}{(1-p)^N - p^N} \\ &= \frac{p^N\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - (1-p)^N - p^N\left(\frac{1-p}{p}\right)^n + p^N}{p^N - (1-p)^N} \\ &= \frac{p^N - (1-p)^N}{p^N - (1-p)^N} \\ &= 1 \end{aligned}$$

— Si $p = \frac{1}{2}$ alors

$$a_n + b_n = 1 - \frac{n}{N} + \frac{n}{N} = 1$$

Dans tous les cas, on a, pour tout $n \in [\![0,N]\!]$, $a_n + b_n = 1$, ainsi $c_n = 0$. Il est donc presque-sûr que la puce va s'arrêter à un certain moment.

Corrigé de l'exercice 19

On suppose les tirages successifs indépendants

1. Les tirages étant supposés indépendants il nous suffit de déterminer la probabilité qu'une boule tirée pour le numéro j et la probabilité qu'une boule tiré ait un numéro strictement inférieur à j.

La probabilité qu'une boule tirée porte le numéro j est $\dfrac{1}{n}$ et la probabilité qu'une boule tirée porte un numéro strictement inférieur à j est $\dfrac{j-1}{n}$.

Ainsi, la probabilité que la k-ième boule tirée ait le numéro j et que toutes les précédentes aient des numéro strictement inférieurs à j est $\dfrac{(j-1)^{k-1}}{n^k}$

2. Les événements « la k-ième boule tirée a le numéro j et toutes les précédentes ont des numéro strictement inférieurs à j »sont deux-à-deux incompatibles. Ainsi

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\text{la } k\text{-ième boule est supérieure à toutes les précédentes})\\ &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(\text{la } k\text{-ième boule tirée a le numéro } j \text{ et toutes les précédentes ont des numéro strictement inférieurs à } j)\\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{(j-1)^{k-1}}{n^k}\end{aligned}$$

3. Notons $P_{k,n}$ la probabilité que la k-ième soit strictement supérieure à toutes les précédentes. Pour $k \in \mathbb{N}$ on a alors

$$P_{k,n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(j-1)^{k-1}}{n^k} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{j^k}{n^k} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^k$$

On reconnaît là une somme de Riemann pour la fonction $x \mapsto x^k$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} P_{k,n} = \int_0^1 x^k \, \mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}$$

Dés

On peut se demander « Pourquoi ne pas prendre un dé à 3 faces ? ». La réponse est : Parce que c'est impossible. On peut en fait montrer qu'il n'existe que 5 types de polyèdre réguliers convexes : à 4 faces (tétraèdre), à 6 faces (cube), à 8 faces (octaèdre), à 12 faces (dodécaèdre) et à 20 faces (icosaèdre)

Corrigé de l'exercice 20

1. $G : Ax + By + C = 0$ est une droite si et seulement si $(A, B) \neq (0, 0)$.

   Ainsi

$$\mathbb{P}(G \text{ est une droite}) = 1 - \mathbb{P}(A = 0, B = 0) = 1 - \mathbb{P}(A = 0)\mathbb{P}(B = 0) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

2. De manière similaire $\mathbb{P}(H \text{ est une droite}) = \dfrac{8}{9}$.

   Puisque les tirages A, B, C, A', B' et C' sont indépendants les évènements « G est une droite »et « H est une droite »sont indépendants, ainsi

$$\mathbb{P}(G \text{ et } H \text{ sont des droites}) = \mathbb{P}(G \text{ est une droite})\mathbb{P}(H \text{ est une droite}) = \frac{64}{81}$$

Conditionnement

Attention, se placer conditionnellement à D change tout le problème, les tirages ne sont plus forcement indépendants (par exemple $\mathbb{P}_D(B = 0|A = 0) = 0$) ni équiprobables.

3. Notons D l'événement « G et H sont des droites »

   Conditionnellement à D les tirages A et B ne sont plus indépendants, par contre les tirages (A, B) et (A', B') le sont encore.

   Sachant D, G et H sont parallèles si et seulement si (A, B) et (A', B') sont colinéaires donc si et seulement si $AB' - BA' = 0$.

   Le plus simple ici est de recenser toutes les situations possibles :

   Conditionnellement à D, il y a 8 issues possibles pour (A, B) : $(0, 1), (0, 2), (1.0), (1.1), (1.2), (2, 0), (2, 1)$ et $(2, 2)$, elles sont toutes équiprobables de probabilité $\dfrac{1}{8}$. De même pour (A', B')

   D'après la formule des probabilités totales on a

$$\mathbb{P}_D(AB' = BA') = \mathbb{P}_D(AB' = BA' = 0) + \mathbb{P}_D(AB' = BA' = 1) + \mathbb{P}_D(AB' = BA' = 2) + \mathbb{P}_D(AB' = BA' = 4)$$

— Sachant D, $AB' = BA' = 0$ si et seulement si $A = A' = 0$ ou si $B = B' = 0$ (la situation $A = B = 0$ est exclue car alors G ne serait pas une droite, idem pour $A' = B' = 0$).

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_D(AB' = BA' = 0) &= \mathbb{P}_D(A = A' = 0) + \mathbb{P}_D(B' = B = 0)\\ &= \mathbb{P}_D(A = 0)\mathbb{P}_D(A' = 0) + \mathbb{P}_D(B = 0)\mathbb{P}_D(B' = 0)\\ &= \frac{2}{8}\frac{2}{8} + \frac{2}{8}\frac{2}{8}\\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

— $AB' = BA' = 1$ si et seulement si $A = A' = B = B' = 1$, ainsi

$$\mathbb{P}_D(AB' = BA' = 1) = \frac{1}{8}\frac{1}{8} = \frac{1}{64}$$

— On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_D(AB' = BA' = 2) = \mathbb{P}_D(A = 2, B' = 1, A' = 2, B = 1) + \mathbb{P}_D(A = 2, B' = 1, A' = 1, B = 2)\\ + \mathbb{P}_D(A = 1, B' = 2, A' = 2, B = 1) + \mathbb{P}_D(A = 1, B' = 2, A' = 1, B = 2)\\ = \frac{1}{8}\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\frac{1}{8}\\ = \frac{4}{64}\\ = \frac{1}{16}\end{aligned}$$

— Enfin $AB' = BA' = 4$ si et seulement si $A = A' = B = B' = 2$, ainsi

$$\mathbb{P}_D(AB' = BA' = 4) = \frac{1}{8}\frac{1}{8} = \frac{1}{64}$$

Finalement

$$\mathbb{P}_D(AB' = BA') = \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \frac{14}{64} = \frac{7}{32}$$

La probabilité que G et H soient parallèles est donc $\frac{7}{32}$.

4. Sachant D, G et H sont parallèles si et seulement si (A, B) et (A', B') sont orthogonaux donc si et seulement si $AA' + BB' = 0$.

   Puisque A, A, B et B' ne peuvent prendre que des valeurs positives on a $AA' + BB' = 0$ si et seulement $AA' = BB' = 0$.

   Sachant D ceci n'arrive que si $A = B' = 0$ ou si $A' = B = 0$.

   Ainsi, par un calcul similaire à ceux déjà fait, la probabilité que G et H soient perpendiculaires est $\frac{1}{8}$.

Corrigé de l'exercice 21

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall t \in [k, k+1], \qquad \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

   D'où, par croissance de l'intégrale,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$$

   Puis, en sommant

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

C'est-à-dire

$$H_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant H_n - \frac{1}{n}$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$$

Classique

Cette question est pratiquement une question de cours, il faut savoir la faire les yeux bandés et une main attachée dans le dos.

Or $\ln(n) + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ et $\ln(n) + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. Ainsi, d'après le théorème d'équivalence par encadrement, $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

2. On suppose les tirages indépendantes et les issues élémentaires équiprobables (i.e. chaque boule a la même chance d'être tirée que les autres).
   (a) Si $n = 3$ alors les urnes contiennent les numéros $1, 2$ et 3.

   E_3 correspond aux issues $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,2)$ et $(3,3)$. Toutes ces issues ont la même probabilité $\frac{1}{9}$. Ainsi $\mathbb{P}(E_3) = \frac{5}{9}$.

   Si $n = 4$ alors les urnes contiennent les numéros $1, 2, 3$ et 4.

   E_4 correspond aux issues $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$ $(2,2)$, $(2,4)$, $(3,3)$ et $(4,4)$. Toutes ces issues ont la même probabilité $\frac{1}{16}$. Ainsi $\mathbb{P}(E_4) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

   (b) On va utiliser la formule des probabilités totales en décomposant suivant les valeurs de a :

$$\mathbb{P}(E_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_n \cap [a = k])$$

   Or, pour $k \in [\![1, n]\!]$, l'évènement $E_n \cap [a = k]$ correspond à l'événement « $a = k$ et b est un multiple de k ». Il s'agit donc de la réunion des événements élémentaires (k, k), $(k, 2k)$, $\cdots$, $\left(k, \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor k\right)$. Toutes ces issues sont équiprobables de probabilités $\frac{1}{n^2}$ et il y en a $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$.

   Ainsi $\mathbb{P}(E_n \cap [a = k]) = \frac{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}{n^2}$.

   D'où

$$\mathbb{P}(E_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}{n^2}$$

   (c) Pour $k \in [\![1, n]\!]$ on a

$$\frac{\frac{n}{k} - 1}{n^2} \leqslant \frac{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}{n^2} \leqslant \frac{\frac{n}{k}}{n^2}$$

   C'est-à-dire

$$\frac{1}{nk} - \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}{n^2} \leqslant \frac{1}{nk}$$

   D'où, en sommant

$$\frac{H_n}{n} - \frac{1}{n} \leqslant \mathbb{P}(E_n) \leqslant \frac{H_n}{n}$$

   Or $\frac{H_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$ et $\frac{H_n}{n} - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$, ainsi d'après le théorème d'équivalence par encadrement, $\mathbb{P}(E_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.